José Acacio de Barros

Conjuntos Genéricos Segundo Cohen e suas Aplicações à Física

TESE DE
MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro
- 1989 -

Há um conceito que é o corruptor e o perturbador
de todos os demais. Não me refiro ao mal,
cujo limitado império é a ética; falo sim do infinito
Jorge Luis Borges

Esta tese é dedicada, pelo candidato e seu
orientador, à memória do Professor
Carlos Marcio do Amaral, mestre e amigo.

Agradecimentos

Ao Prof. Francisco Antonio Doria, cujo estímulo, não só em física e matemática, mas também em outras áreas tão avessas a essas, como a egiptologia, foi fundamental à minha formação.

Ao Prof. Antonio Fernandes da F. Teixeira, pelo seu apoio aqui no CBPF, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos amigos do CBPF, em especial aos amigos André Grinztejn, Maria Emília X. Guimarães, Fernando Luiz C. Carvalho, Odivaldo C. Alves, Welles A. M. Morgado, Ricardo Paschoal, Ladario da Silva, Sebastião A. Dias, Sonia Regina de Sá, Luiz Galisa Guimarães, Rosana Bulos Santiago, Marco Antonio de Andrade, José Luiz M. do Valle, Sérgio Duque e todos aqueles que de uma maneira ou de outra contribuiram para tornar mais agradável a minha estadia aqui.

Ao CNPq, pela bolsa concedida.

Aos meus tios, pela estadia durante mais de cinco anos no Rio de Janeiro.

Aos meus pais, pelo apoio durante toda a minha vida.

À Ana Lúcia, que me deu motivos para que terminasse este trabalho.

Resumo

Neste trabalho demonstramos existir uma relação entre a razão de crescimento da cardinalidade das órbitas de um dado sistema simbólico e a sua entropia. Com a ajuda deste resultado, obtemos um teorema que nos mostra ter medida nula o conjunto de trajetórias cuja entropia é positiva. Mostramos também que a entropia não é um conceito absoluto (no sentido da teoria dos conjuntos). Após isto, damos um exemplo de proposição formalmente indecidível em eletromagnetismo clássico. Ainda seguindo a idéia dada pela teoria dos conjuntos, mostramos as condições para a existência de espaços-tempo genéricos.

Abstract

Here we show that there exists a relation between the increasing rate of the symbolic system's orbit cardinality and its entropy. Relying on this relation, we show that the set of trajetories with non-null entopy is a residual set. We also show that entropy is not a set-theoretically absolute concept (in the sense of Gödel). Then we find a formally undecidable statement on classical electromagnetic theory. Following this idea, we exhibit the conditions for the existence of generic space-times.

Contents

Chapter 1

Introdução

Em 1931 um jovem logico austríaco, chamado Kurt Gödel, demonstrou um teorema provando que dada uma teoria formal para a aritmética elementar existiriam proposições nesta teoria que nem elas nem suas negações poderiam ser demontradas usando-se apenas o aparato desta teoria. Tal fato ficou conhecido posteriormente como *Teorema da Incompletude de Gödel*.

Em 1963, P. J. Cohen demonstrou a independência da Hipótese do Contínuo (CH) de Cantor face aos axiomas de Zermelo-Fraenkel para a teoria dos conjutos, isto é, que a CH não pode ser demonstrada usando-se somente os axiomas de ZF. Cohen criou para isto a técnica de *forcing*, que lhe permitiu criar diferentes modelos para os axiomas de ZF, num dos quais, segundo uma dada interpretação, HC era verdadeira (ou seja, tinha valor verdade máximo). Posteriomente, devido a este trabalho, Cohen ganhou a medalha Fields.

Num artigo de divulgação publicado na revista Scientific American [11] Cohen sugeriu que assim como a criação da Geometria Não-Euclidiana teve grande importancia na física moderna o surgimento de Teorias Não-Cantorianas dos Conjuntos também deveria ter muitas aplicações. Foi na tentativa de buscar aplicações para estas teorias que fizemos este trabalho que consta de resultados em Teoria Ergódica, Eletromagnetismo Clássico e Relatividade Geral. Artigos nesta direção são as referências [**?**], [13], [14], [15], [16], [3], [4] e [8].

No primeiro capítulo é feita uma revisão da Teoria Ergódica; estudamos o caso do *shift* de Bernoulli e colocamos a demonstração do teorema ergódico; feito isso, definimos o que vem a ser a entropia de Shannon, seguida da prova do teorema de Kolmogorov-Sinai; obtemos, após a demonstração do teorema de Shannon-MacMillan-Breimann, a propriedade de equipartição da entropia; finalmente, obtemos uma relaç ao entre o crescimento da cardinalidade das órbitas de um sistema simbólico com a sua entropia.

No segundo capítulo, colocamos alguns exemplos de sentenças indecidíveis em física e em matemática. Apresentamos uma senteça indecidível no Eletromagnetismo Clássico. Na Relatividade Geral, mostramos que, em alguns casos, existem variedades genéricas (i. e. não-standard). Mostramos também que sistemas de entropia não nula podem ter entropia nula quando mudamos de modelo conjuntista; Usando a ferramenta apresentada no Capítulo 1 demonstramos o teorema de Rohlin.

A maior parte dos teoremas encontrados no texto estão sem as respectivas demontrações, sendo estas encontradas nas referências citadas; estas provas não foram incluidas para não tornarem este texto mais longo do que o razoável. Os teoremas mais importantes têm suas demonstrações feitas, ou ao menos esboçadas. Como referências o capítulo 1 podemos citar os livros de Billingsley [5], Friedmann [23], Mañé [37] ou Petersen [44]. Os livros de Bell [2], Jech [30] e Manin [38] são excelentes textos para a teoria de modelos booleanos, contendo os dois últimos um bom material para o estudo da teoria axiomática dos conjuntos. A teoria de modelos pode ser encontrada em Krivine [33], Kunen [34] e Cohen [9]. Stoll [46] e Suppes [50] são boas referências, apesar de antigas, para a axiomatização da teoria dos conjuntos, apresentando o primeiro um capítulo sobre lógica.

Como pré-requisito o leitor nescessita de algum conhecimento de: Álgebras de Boole, que pode ser adquirido (até um pouco acima do que precisamos) em Halmos [27]; Teoria Ingênua dos Conjuntos (Halmos [26]); Topologia Geral (um apanhado geral pode ser visto em Lipschutz [36]); Teoria da Medida ([21] ou [29]).

A nossa notação è a mesma de Krivine [33] e Bell [2] e eventuais diferenças serão mencionadas explicitamente.

Chapter 2

Teoria Ergódica, Entropia e Funções Exponenciais

2.1 Introdução

É comum, em Física, tentarmos aproximar determinadas equações de movimento por outras que sejam mais facilmente tratáveis pela análise padrão. Assim, se temos uma determinada lei dinâmica, experimentamos aproximá-la por outra bem comportada. Infelizmente este tipo de procedimento nem sempre funciona, pois, na Natureza, podemos encontrar algumas situações em que, com uma pequena mudança na dinâmica, modificamos em muito o comportamento do sistema.

Nos últimos anos o papel que os sistemas turbulentos e/ou caóticos tinham aumentou consideravelmente na Física, crescendo em particular o interesse naqueles cujo movimento fosse regido por leis probabilísticas. Isto ocorreu devido à descoberta que diversos sistemas fisicos cujas leis, razoavelmente simples na forma, resultavam num comportamento extremamente complexo. Estes sistemas eram de difícil tratamento e seu estudo probabilístico tornou-se importante.

Imaginemos uma experiência em que medimos a temperatura de uma amostra a cada cinco minutos. Um possível resultado para uma experiência deste tipo é mostrado na tabela abaixo, onde colocamos à direita a temperatura absoluta (°K) de uma dada amostra e à esquerda o instante no qual esta temperatura foi medida:

Temperatura (°K) /	Tempo ($\times$ 5 min.)
$\vdots$	$\vdots$
4.20	-2
4.20	-1
4.21	0
4.20	1
4.19	2
4.22	3
$\vdots$	$\vdots$

Podemos representar este resultado por uma sequência $(..., 4.20, 4.21, 4.20, 4.19, 4.22, ...)$, onde a cada número corresponde uma temperatura num dado instante; por exemplo, sendo 4.20 a temperatura em $t = -5$ min., 4.21 é a temperatura em $t = 0$ min. e assim por diante.

Do mesmo modo, podemos imaginar experiências similares em que observamos uma determinada variável (medida) em função do tempo. Suponhamos, de uma maneira mais geral, que essa variável assuma valores sobre um conjunto pré-estabelecido $\rho = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{r-1}\}$. Um experimento poderá ser representado por uma sequência bi-infinita de elementos de ρ do tipo $\omega = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots)$, onde $\omega_i \in \rho$ é o resultado da experiência no instante t^i (o uso de uma sequência desse tipo implica num tempo de experiência que se prolonga infinitamente tanto para o futuro quanto para o passado; fisicamente isso é impossível de ser realizado[1] mas matematicamente esta hipótese é crucial). Às sequências desta forma chamaremos de *Trajetórias Simbólicas*.

O objetivo da Teoria Ergódica (T.E.) é o estudo de trajetórias simbólicas cujos ω_i são regidos segundo leis probabilísticas e, por isso, neste capítulo, centralizaremos nossa atenção sobre os Espaços de Medida.

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidades (para uma revisão da teoria das medidas veja [21] ou [29]; o que necessitamos pode ser encontrado no Cap. 0 do livro de Mané [37]), onde X é o conjunto de todas as trajetórias simbólicas admissíveis e B é uma σ-álgebra sobre X, usualmente gerada pelos boreleanos. Seja $T : X \mapsto X$ uma transformação que leva objetos de X sobre ele mesmo. T é mensurável se $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ implica que $T^{-1}\mathcal{A} = \{\omega : T\omega \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{B}$. T preserva a medida se $\mu(T^{-1}\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A})$ para todo o $\mathcal{A}$ pertencente à σ-álgebra $\mathcal{B}$.

Na Teoria Ergódica estudamos as tranformações T que preservam a medida. A motivação para isto é dada pelo Teorema de Liouville em Mecânica Estatística [2] mas podemos ver a sua necessidade se queremos estudar processos cuja

[1] Uma possível alternativa seria o uso de números hiperfinitos, tomados num modelo não-standard para a aritmética.

[2] Esta ligacao vem de equiprobabilizarmos o espaco de fase, em Mecanica Estatistica Classica, ou o espaco de Hilbert, em Mecanica Estatistica Quantica, quando usamos o Ensemble Microcanonico. Para esta conexao veja por exemplo [1], [31] ou [53].

evolução no tempo, representada pela aplicação de T, não altera as probabilidades para que determinado valor seja medido.

Definiremos um conjunto A como sendo invariante se $T^{-1}A = A$.

Uma transformação T é dita *ergódica* se cada conjunto invariante em $\mathcal{B}$ tem ou medida nula ou um.

De posse de todas estas definições preliminares, vejamos um exemplo conhecido como *shifts* ou deslocamentos de Bernoulli.

2.2 *Shifts* de Bernouilli

Seja ρ um conjunto definido como na seção anterior. Atribuimos a cada elemento ρ^i de ρ um peso p^i tal que $p^i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^{r-1} p^i = 1$. O espaço ρ^{Z}, onde $\mathsf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ é o conjunto dos inteiros, é o espaço de todas as sequências bi-infinitas de símbolos de ρ possíveis. Seja ainda $x_n : X \mapsto \rho$, onde aqui consideramos $X = \rho^{\mathsf{Z}}$, uma função que nos dá o valor da n-ésima coordenada de uma sequência $\omega \in X$, ou seja, $x_n(\omega) = \omega_n \in \rho$. A σ-álgebra $\mathcal{B}$ é gerada pela álgebra consistindo dos conjuntos cilíndricos (ou simplesmente cilindros)

$$\{\omega : x_l(\omega) = i_l, n \leq l < n + k\}$$

onde $i_l \in \rho$. A medida μ, definida sobre os elementos da σ-álgebra $\mathcal{B}$, é dada em função dos pesos (ou probabilidades) p_i dos elementos de ρ como:

$$\mu(\{\omega : x_l(\omega) = i_l, n \leq l < n + k\}) =$$

$$p_{i_n} \cdot p_{i_{n+1}} \cdot \ldots \cdot p_{n_{n+k-1}} =$$

$$= \prod_{l=n}^{n+k-1} p_{i_l}$$

Seja agora $T : \rho^{\mathsf{Z}} \mapsto \rho^{\mathsf{Z}}$ uma tranformação do tipo *shift*[3] determinada pela equação:

$$x_n(T(\omega)) = x_{n+1}(\omega)$$

Esta tranformação, como pode ser facilmente demonstrado, preserva a medida μ determinada anteriormente. T, definida como acima, é conhecida como *Shift de Bernoulli*; se temos n elementos em ρ com probabilidade p_i, $0 \leq i \leq n-1$, o *shift* de Bernoulli correspondente é denotado por $\mathcal{B}(p_0, \ldots, p_{n-1})$. Com isto $\mathcal{B}(1/2, 1/2)$ modela, por exemplo, uma experiência tipo cara-coroa.

[3]Shift em português significa deslocamento e seguindo a tradição da literatura especializada brasileira manteremos esta palavra em inglês no texto.

2.3 O Teorema Ergódico

Apresentaremos nessa seção uma das muitas maneiras ([5], [?], [37] ou [44]) de demonstrarmos o Teorema Ergódico (T. E.). Devido a sua grande importância tanto na Física quanto na Matemática (veja Mackey [39] ou Tolman [51]), resolvemos dedicar toda esta seção ao T. E. .

Existem vários enunciados diferentes para o Teorema Ergódico, e a forma que apresentaremos aqui é conhecida como Teorema Ergódico de Birkhoff ([6]); a nossa demonstração segue as provas dadas por Mané [37] e Petersen [44]. [de Birkhoff] Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $T : X \mapsto X$ uma transformação que preserva a medida e $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Então

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \overline{f}(x)$ existe em q. t. p.;
2. $\overline{f}(Tx) = \overline{f}(x)$ em q. t. p.;
3. $\overline{f} \in L^1$, e de fato $|\overline{f}_1| \leq |f|_1$;
4. Se $A \in \mathcal{B}$ com $T^{-1}A = A$, então $\int_A f \cdot d\mu = \int_A \overline{f} \cdot d\mu$;
5. $\frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} fT^k \to \overline{f}$ em L^1.

(q.t.p é a abreviatura de "quase todos os pontos", isto é, a menos de um conjunto de medida nula.)

Prova: Antes, precisamos de um Lema. [Teorema Ergódico Maximal] Seja $f \in L^1(X)$ e definamos

$$E(f) = \{x : \sup_{n\geq 0} \sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) > 0\}$$

Então:

$$\int_{E(f)} f \cdot d\mu \geq 0$$

Prova do Lema: Veja Mané [37] pag. 120. Desse Lema obtemos o Se $A \subset E(f)$ pertenca à σ-álgebra e $T^{-1}(A) = A$, então

$$\int_A f \cdot d\mu \geq 0$$

Prova do Corolário: Veja Mané [37] pag. 118.

Voltemos à prova do Teorema.

1) Como $f \in L^1(X)$ podemos definir

$$E_\alpha^+(f) = \{x : \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(T^J(x)) > \alpha\}$$

e

$$E_\alpha^-(f) = \{x : \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) < \alpha\}$$

Das definições obtemos

$$E_\alpha^+(f) = E_0^+(f-\alpha)$$

$$E_\alpha^-(f) = E_\alpha^-(-f)$$

Temos que

$$\int_{E_\alpha^+(f)} f \cdot d\mu = \int_{E_\alpha^+(f)} (f-\alpha)d\mu + \alpha \cdot \mu(E_\alpha^+(f)) =$$

$$= \int_{E_{f-\alpha}^+} (f-\alpha)d\mu + \alpha \cdot \mu(E_\alpha^+(f))$$

que resulta em

$$\int_{E_0^+(f-\alpha)} d\mu \geq 0$$

pelo corolário anterior e pelo fato de que $T^{-1}(E_0^+(f-\alpha)) \subset E_0^+(f-\alpha)$ e $E_0^+(f-\alpha) \subset E(f-\alpha)$. Usando estes resultados podemos ver que

$$\int_{E_\alpha^+(f)} f \cdot d\mu \geq \alpha \cdot \mu(E_\alpha^+(f))$$

Se $A \in \mathcal{B}$ está contido em $E_\alpha^+(f)$ e $T^{-1}(A) = A$ então

$$\int_A f \cdot d\mu \geq \alpha \cdot \mu(A) \tag{2.1}$$

pois $\int_A f \cdot d\mu = \int_A f \cdot \chi_A \cdot d\mu = \int_{E_\alpha^+(f \cdot \chi_A)} f \cdot \chi_A \cdot d\mu \geq \alpha \cdot \mu(E_\alpha^+) = \alpha \cdot \mu(A)$.

Como $E_\alpha^-(f) = E_\alpha^+(-f)$, temos de 2.1 que se $f \in L^1(X)$, $A \in \mathcal{B}$ está contido em $E_\beta^-(f)$ e satisfaz $T^{-1}(A) = A$ então

$$\int_A \chi_A d\mu \leq \beta \cdot \mu(A)$$

Dessa equação e de 2.1, se $\alpha > \beta$ temos

$$\mu(E_\alpha^+(f) \cap E_\beta^-(f)) = 0$$

fazendo-se $A = E_\alpha^+(f) \cap E_\beta^-(f)$.

Se pegamos uma sequência α_n, $n \geq 1$ densa em R resulta que

$$\{x : \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\sum_{j=0}^n f(T^j(x))}{n+1} > \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\sum_{j=0}^n f(T^j(x))}{n+1}\} =$$

$$= \bigcup_{\alpha_n > \alpha_m} E_{\alpha_n}^+(f) \cap E_{\alpha_m}^-(f)$$

Como vimos $\mu(\bigcup_{\alpha_n > \alpha_m} E_{\alpha_n}^+(f) \cap E_{\alpha_m}^-(f)) = 0$; então o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$$

converge em q.t.p.;

2)

$$\overline{f}(T(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) - \frac{1}{n}f(x)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) = \overline{f}(x) \text{ q.t.p.}$$

3)

$$|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} fT^k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f|T^k$$

e temos

$$\int_X |\overline{f}|d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(T^k(x))|d\mu =$$

$$= \int_X |f|d\mu < \infty$$

então

$$\|\overline{f}\|_1 \leq \|f\|_1$$

5) Provaremos antes a parte 5) do teorema para depois tirarmos 4) como um corolário.

Temos que mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \|\overline{f} - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j\|_1 = 0$$

Se g é uma função limitada $0 \leq g \leq f$, então

$$\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k - \overline{f}\|_1 \leq \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f\circ T^k - g\circ T^k)\|_1 +$$

$$+\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\circ T^k - \overline{g}\|_1 + \|\overline{g} - \overline{f}\|_1$$

Pelo ítem 3) $\|g - f\|_1 \geq \|\overline{g} - \overline{f}\|_1$ e pode ser arbitrariamente aproximada escolhendo-se um g apropriado. Da mesma maneira, o primeiro termo também é menor ou igual a $\|f - g\|_1$. Uma vez sendo g fixo o segundo termo se aproxima de zero quando $n \to \infty$ o que prova o ítem 5).

4) Para provar 4) temos

$$|\int_A f d\mu - \int_A \overline{f} d\mu| =$$

$$= |\int_A (\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k - \overline{f}) d\mu| \leq$$

$$\leq \int_A |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k - \overline{f}| d\mu =$$

$$= \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k - \overline{f}\|_1 \to 0$$

o último limite vindo do ítem 5). Se T é ergódico, então $\overline{f}$ é constante e

$$\overline{f}(x) = [\mu(x)]^{-1}\int f \quad \text{q.t.p}$$

Este corolário nos diz que a média temporal $\overline{f}$ de $f(t^k(x))$ é igual, em quase todos os pontos, à sua média $[\mu(x)]^{-1}\int f$ no espaço (de fase).

Como podemos ver dos teoremas anteriores, a condição de ergodicidade faz com que a transformação T percorra todo o espaço de fases, permitindo que tenhamos a média temporal igualada á média espacial. Isto pode ser considerado semelhante á hipótese do caos molecular, proposta por Boltzman na Teoria Cinética dos Gases.

2.4 Entropia

Um dos conceitos mais interessantes é o de *Entropia*, aparecendo com destaque em diferentes áreas da Física e da Matemática, introduzida na teoria ergódica em 1958 por Kolmogorov, a partir de idéias de Nyquest e Shannon em teoria da informação. Usando-a, Kolmogorov e Sinai mostraram que os *shifts* de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2, 1/2)$ e $\mathcal{B}(1/3, 1/3, 1/3)$ não eram equivalentes, i. e., não modelavam o mesmo experimento.

A pergunta que eles fizeram foi: dada uma tranformação T que preserva a medida em $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\tilde{T}$ uma t. p. m. em $(\tilde{X}, \mathcal{B}, \tilde{\mu})$, são T e $\tilde{T}$ isomorfas, no sentido de representarem a mesma experiência ?

Para respondermos a essa questão, precisamos antes definir, de uma maneira precisa, o que é um isomorfismo entre dois sistema. Seja $X_) \in \mathcal{B}$ e $\tilde{T}_0 \in \mathcal{B}$, conjuntos de medida 1. Se existe um mapeamento ϕ de X_0 sobre $\tilde{X}_0$ com as propriedades:

1. ϕ é 1-1;
2. Se $A \subset X_0$ e $\tilde{A} = \phi A$, então $A \in \mathcal{B}$ se e somente se $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{F}}$; nesse caso $\mu(A) = \tilde{\mu}(\tilde{A})$;

3. Se temos $X_0 \subset T^{-1}X_0$ e $\tilde{\Omega}_0 \subset \tilde{T}^{-1}\tilde{\Omega}_0$ então

$$\phi T\omega = \tilde{T}\phi\omega$$

vale para qualquer ω em X_0;

então dizemos que $(X_0, \mathcal{B}, \mu, T)$ e $(\tilde{\Omega}_0, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ são isomorfos.

Para provarmos que duas tranformações não são isomorfas, teríamos que construir todos os mapeamentos possíveis entre um espaço e o outro, e depois mostrar que esses mapas não satisfazem às condições da definição anterior. Obviamente este é um trabalho penoso, algumas vezes impossível de ser realizado.

Este problema pode ser contornado usando-se o conceito de invariante. Suponhamos que T seja isomorfa a $\tilde{T}$ segundo $(X_0, \tilde{\Omega}_0, \phi)$. Se T tem uma determinada propriedade e, por isso, $\tilde{T}$ também a tem obrigatoriamente, então esta propriedade é um invariante. Como um exemplo temos o *mixing* (uma t. p. m. é *mixing* se $\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$). Se T e $\tilde{T}$ são isomorfas e se T é *mixing* então $\tilde{T}$ também é. A recíproca não é verdadeira, ou seja, T e $\tilde{T}$ serem *mixing* não implica que também sejam isomorfas. Um outro exemplo de invariante é a ergodicidade.

Dentre os invariantes os mais interessantes estão aqueles ditos completos. Um invariante é completo se dois sistemas que têm esse mesmo invariante forem obrigatoriamente isomorfos. Foi com o intuito de procurar invariantes completos que Kolmogorov introduziu a entropia, mostrando que $\mathcal{B}(1/2, 1/2)$ e $\mathcal{B}(1/3, 1/3, 1/3)$ não são isomorfos.

Antes de definirmos entropia vejamos algumas definições preliminares. Uma *subálgebra σ-finita* (ou simplesmente *σ-finita*) de B é um conjunto X, tal que X pode ser escrito como uma união enumerável $X = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ e tal que $\mu(A_n) < \infty$ para todo o n e $A_n \in \mathcal{B}$. $\{A_1, \ldots, A_n\}$ é uma *$\mathcal{B}$-decomposição* de X se é uma coleção finita e disjunta de elementos não vazios de $\mathcal{B}$ cuja união é X. Os elementos A_i são chamados de *átomos*.

Qualquer σ-finito vem de uma $\mathcal{B}$-decomposição. Seja $\mathcal{A}$ uma subálgebra σ-finitas de $\mathcal{B}$. A entropia de $\mathcal{A}$ é definida por

$$H(\mathcal{A}) = -\sum_{A\in\mathcal{A}} \mu(A)\log\mu(A)$$

onde os elementos $A \in \mathcal{A}$ são os átomos de uma $\mathcal{A}$-decomposição.

A entropia de um σ-finito $\mathcal{A}$ relativa à transformação T é

$$h(\mathcal{A}, T) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} H(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\mathcal{A})$$

onde $\bigvee_{k=0}^{n-1}$ denota a σ-álgebra gerada por $\bigcup_{k=0}^{n-1} T^{-k}\mathcal{A}$, $T^{-n}\mathcal{A} = \{T^{-n}A : A \in \mathcal{A}\}$. Com isto podemos definir a entropia de T como

$$h(T) = \sup_{\mathcal{A}} h(\mathcal{A}, T)$$

onde o supremo é tomado em relação a todos os σ-finitos $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$.

Listaremos algumas das principais propriedades de $H(\mathcal{A})$ e $h(\mathcal{A}, T)$ (as demonstrações podem ser encontradas em Billingsley [5] pags. 77—84) mas antes definamos um conceito auxiliar chamado *entropia condicional* de $\mathcal{A}$ dado $\mathcal{B}$, sendo $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ subálgebras σ-finitas de $\mathcal{B}$, como:

$$H(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \sum_B \mu(B) \sum_A (-\mu(A|B) \log(\mu(A|B))) =$$

$$= -\sum_{A,B} \mu(A \cap B) \log \mu(A|B)$$

onde $\mu(A|B) = \mu(A \cap B)/\mu(B)$, a soma é feita sobre os átomos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e onde suprimimos qualquer termo envolvendo um átomo de medida nula.

Propriedades de $H(\mathcal{A})$ e $H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$

H**1)** $H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}|\mathcal{C}) = H(\mathcal{A}|\mathcal{B}) + H(\mathcal{B}|\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$
$H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B}|\mathcal{A})$

H**2)** $H(\mathcal{A}|\mathcal{C}) \leq H(\mathcal{B}|\mathcal{C})$ se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$
$H(\mathcal{A}) \leq H(\mathcal{B})$ se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$

H**3)** $H(\mathcal{A}|\mathcal{C}) \leq H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ se $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$
$H(\mathcal{A}|\mathcal{C}) \leq H(\mathcal{A})$

H**4)** $H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}|\mathcal{C}) \leq H(\mathcal{A}|\mathcal{C}) + H(\mathcal{B}|\mathcal{C})$
$H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq H(\mathcal{A}) + H(\mathcal{B})$

H**5)** $H(T^{-1}\mathcal{A}|T^{-1}\mathcal{B}) = H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$
$H(T^{-1}\mathcal{A}) = H(\mathcal{A})$

Propriedades de $h(\mathcal{A}, T)$

h**1)** $h(\mathcal{A}, T) = \lim_{n\to\infty} H(\mathcal{A}| \bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i}\mathcal{A})$

h**2)** $h(\mathcal{A}, T) \leq h(\mathcal{B}, T)$ se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$

h**3)** $h(\bigvee_{j=u}^{v} T^{-j}\mathcal{A}, T) = h(\mathcal{A}, T)$

h**4)** $h(\bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-j}\mathcal{A}, T^k) = k \cdot h(\mathcal{A}, T)$, $k \geq 1$ *

h**5)** $h(\mathcal{A}, T) \leq h(\mathcal{B}, T) + H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$

Demonstraremos um importante teorema que relaciona $h(T)$ com $h(\mathcal{A}, T)$. [de Kolmogorov-Sinai] Se Té inversível e $\bigvee_{n=-\infty}^{+\infty} T^n \mathcal{A} = \mathcal{B}$, então $h(T) = h(\mathcal{A}, T)$.

Prova: Temos que mostrar que para qualquer subálgebra finita Λ de $\mathcal{B}$ vale $h(\Lambda, T) \leq h(\mathcal{A}, T)$ pois então $h(\mathcal{A}, T) = \sup_{\mathcal{B}} h(\mathcal{B}, T) = h(T)$.

Seja $\mathcal{A}_n = \bigvee_{k=-1}^{n} T^k \mathcal{A}$; resulta de $h3$) que

$$h(\mathcal{A}_n, T) = h(\mathcal{A}, T)$$

e por $h5$)

$$h(\Lambda, T) \leq h(\mathcal{A}_n, T) + H(\mathcal{B}|\mathcal{A}_n) = h(\mathcal{A}, T) + H(\mathcal{B}|\mathcal{A}_n)$$

É suficiente mostrar que $\lim_{n\to\infty} H(\mathcal{B}|\mathcal{A}_n) = 0$. Para isso precisamos de um lema. Suponha que a álgebra finita $\mathcal{A}$ está contida na σ-álgebra gerada por $\mathcal{B}_0$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma subálgebra finita $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}_0$ tal que $H(\mathcal{A}|\mathcal{B}) < \epsilon$.

Prova do Lema: Veja Billingsley [5] pag. 80.

Se $\mathcal{B}_0 = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ então $\mathcal{B}_0$ é uma álgebra finitamente aditiva que gera $\mathcal{B}$. Pelo Lema 2.4, para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma subálgebra finita $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}_0$ tal que $H(\Lambda|\mathcal{C}) < \epsilon$. $\mathcal{C}$ fica em algum $\mathcal{A}_{n_0}$; se $n \geq n_0$

$$H(\mathcal{B}|\mathcal{A}_n) \leq H(\mathcal{B}|\mathcal{A}_{n_0}) \leq H(\mathcal{B}|\mathcal{C}) < \epsilon$$

o que termina a demonstração.

Vejamos como esses resultados podem, ser usados num *shift* de Bernoulli $\mathcal{B}(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})$. Suponhamos que nossa trajetória simbólica ω assuma valores em ρ^{Z} e ainda que nossa transformação de *shift* seja $\sigma : \rho^{\mathsf{Z}} \mapsto \rho^{\mathsf{Z}}$. É fácil ver que a entropia deste *shift* é dada por

$$H = -\sum_{i=0}^{n-1} p_i \log p_i$$

que é justamente a calculada por Shannon via Teoria da Informação [47]. Isto justifica a interpretação de que a entropia é a medida da informação ou da aleatoriedade com que os pontos de X são movidos por T.

Como dissemos anteriormente, a entropia é um invariante, mas não é completa. Ela é na verdade um invariante para o que se chama de isomorfismo fraco, sendo duas transformações com a mesma entropia fracamente isomorfas (para um exemplo de tais sistemas veja [45]), ou seja, homeomorfas módulo zero.

2.5 O Teorema de Shannon–McMillan–Breiman

Nessa seção demonstraremos um resultado fundamental em teoria ergódica, obtido em diferentes graus de generalização por C. Shannon 1948, B. McMillan 1953 e L. Breiman 1957, conhecido como Teorema de Shannon-McMillan-Breiman, que nos diz que, se temos um tempo suficientemente longo, a quantidade média de informação por símbolo converge para a entropia da fonte.

A demonstração resulta do teorema ergódico mais o da convergência para probabilidades condicionais, enunciado abaixo. [da convergência para probabilidades condicionais] Suponha que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \ldots$ e que $\mathcal{G} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$. Então, para qualquer x integrável nós temos (com $E\{x\|\mathcal{G}\}$ denotando o valor esperado de x com respeito a $\mathcal{G}$ e $\mu\{M, \mathcal{G}\}$ a probabilidade condicional de M com relação a $\mathcal{G}$)

$$\lim_{n\to\infty} E\{x\|\mathcal{G}_n\} = E\{x\|\mathcal{G}\} \text{ q.t.p.}$$

e para qualquer $M \in \mathcal{B}$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{M\|\mathcal{G}_n\} = \mu\{M\|\mathcal{G}\} \text{ q.t.p.}$$

Prova: Veja Billingsley [5] pag. 116. [Shannon–McMillan–Breiman] Se T é um *shift* ergódico então

$$\lim_{n\to\infty} \{-\frac{1}{n} \log \mu(x_0(\omega), ..., x_{n-1}(\omega))\} = h(T) \quad \text{q.t.p.}$$

Prova: Seguiremos estritamente a demonstração dada por Billingsley [5] pag. 129.

Consideremos as funções

$$g_0(\omega) = -\log \mu(x_0(\omega))$$

$$g_k(\omega) = -\log\{\frac{\mu(x_{-\alpha}(\omega), \ldots, x_{-1}(\omega), x_0(\omega))}{\mu(x_{-k}(\omega), \ldots, x_{-1}(\omega))}\}$$

$$f_k^{(i)} = -\log\{\frac{\mu(x_{-\alpha}(\omega), \ldots, x_{-1}(\omega), i)}{\mu(x_{-k}(\omega), \ldots, x_{-1}(\omega))}\}$$

note que, sendo $\mu\{x\|\mathcal{G}\}_\omega$ o valor de $\mu\{x\|\mathcal{G}\}$ no ponto ω, $f_k^{(i)} = -\log \mu\{x_0 = i\|x_{-k}, \ldots, x_{-1}\}_\omega$.

Temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k(T^k\omega) =$$

$$= \frac{1}{n}\{g_0(\omega) + g_1(T\omega) + \ldots + g_{n-1}(T^{n-1}\omega)\} =$$

$$= \frac{1}{n}\{-\log \mu(x_0(\omega)) - \log \frac{\mu(x_{-1}(T\omega), x_0(T\omega))}{\mu(x_{-1}(T\omega))}$$

$$-\log \frac{\mu(x_{-2}(T^2\omega), x_{-1}(T^2\omega), x_0(T^2\omega))}{\mu(x_{-2}(T^2\omega), x_{-1}(T^2\omega))} -$$

$$-\ldots-\log\frac{\mu(x_{1-n}(T^{n-1}\omega),\ldots,x_0(T^{n-1}\omega))}{\mu(x_{1-n}(T^{n-1}\omega),\ldots,x_1(T^{n-1}\omega))}\}=$$

$$=-\frac{1}{n}\{\log[\mu(x_0(\omega))\cdot\frac{\mu(x_{-1}(T\omega),x_0(T\omega))}{\mu(x_{-1}(T\omega))}\cdot\ldots\cdot$$

$$\ldots\cdot\frac{\mu(x_{1-n}(T^{n-1}\omega),\ldots,x_0(T^{n-1}\omega))}{\mu(x_{1-n}(T^{n-1}\omega),\ldots,X_1(T^{n-1}\omega))}]\}$$

Como T é um *shift* ergódico temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g_k(T^k\omega)=-\frac{1}{n}\{\log[\mu(x_0(\omega))\cdot\frac{\mu(x_0(\omega),x_1(\omega))}{\mu(x_0(\omega))}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\frac{\mu(x_0(\omega),\ldots,x_{n-1}(\omega))}{\mu(x_0(\omega),\ldots,x_{n-2}(\omega))}\}$$

então

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g_k(T^k\omega)=-\frac{1}{n}\log(x_0(\omega),\ldots,x_{n-1}(\omega))$$

Pelo teorema 2.5, $\mu\{x_0=i\|x_{-k},\ldots,x_{-1}\}$ converge q.t.p. para $\mu\{x_0=i\|\ldots,x_{-2},x_{-1}\}$. Mas $f_k^{(i)}=-\log\mu\{x_0=i\|x_{-k},\ldots,x_{-1}\}_\omega$, então, pela continuidade da função log, $f_k^{(i)}$ converge q.t.p.; desde que $g_k(\omega)$ coincide com $f_k^{(i)}(\omega)$ no cilindro $\{\omega: x_0(\omega)=i\}$, o limite

$$g(\omega)=\lim_{k\to\infty}g_k(\omega)$$

existe q.t.p.. Mostraremos que (usando a notação $Ef=\int f(\omega)\mu(d\omega)=Ifd\mu$, c.f. Billingsley [5])

$$E\{\sup_k g_k(\omega)\}<+\infty$$

que resulta em $g(\omega)$ ser integrável e finita em quase todos os pontos. Se

$$E_k=\{\omega:\max_{1\le j\le k}g_j(\omega)\le\lambda<g_k(\omega)\}$$

então

$$\mu(E_k)=\sum_i\mu(\{x_0=i\}\cap E_k)=\sum_i\mu(\{x_0\subset i\}\cap F_k^{(i)}\}$$

onde $F_k^{(i)}=\{\omega:\max_{1\le j<k}f_j^{(i)}(\omega)\le\lambda<f_k^{(i)}(\omega)\}$. Mas $F_k^{(i)}$ é a σ-álgebra gerada por $x_{-k},\ldots,x_{-1}$, então

$$\mu(\{x_0=i\}\cap F_k^{(i)}\})=\int_{F_k^{(i)}}\mu\{x_0=i\|x_{-k},\ldots,x_{-1}\}d\mu(\omega)=$$

$$=\int_{F_k^{(i)}}e^{-f_k^{(i)}(\omega)}\mu(d\omega)\le e^{-\lambda}\cdot\mu(F_k^{(i)})$$

$F_k^{(i)}$ sendo disjunto para diferentes k,

$$\sum_k \mu(E_k) \leq \sum_i e^{-\lambda} \sum_k \mu(F_k^{(i)}) \leq re_{-\lambda}$$

onde r é o tamanho de ρ. Então

$$\mu\{\omega : \sup_k g_k(\omega) > \lambda\} \leq re_{-\lambda}$$

onde resulta que

$$E\{\sup_k g_k(\omega)\} < +\infty$$

Com isto g é integrável e podemos integrar o limite $E\{g\} = \lim_{k\to\infty} E\{g_k\}$. Como $-\frac{1}{n}(x_0(\omega), \ldots, x_{n-1}(\omega)) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k(T^k\omega)$ e $\int_{T^{-1}} f(T\omega)\mu(d\omega) = \int_A f(\omega)\mu(d\omega)$ temos

$$E\{g\} = \lim_{n\to\infty} E\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k(T^k\omega)\} = h(T)$$

Obtemos

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k(T^k\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(T^k\omega) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(g_k(T^k\omega) - g(T^k\omega)) \tag{2.2}$$

O teorema 2.3 implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(T^k\omega) = E\{g\} = h(T) \quad \text{q.t.p.} \tag{2.3}$$

Se $G_N(\omega) = \sup_{k\geq N} |g_k(\omega) - g(\omega)|$, então

$$\lim_{n\to\infty} \sup |\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(g_k(T^k\omega) - g(T^k\omega))| \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |g_k(T^k\omega) - g(T^k\omega)| \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} G_N(T^k\omega) = E\{G_N\} \quad \text{q.t.p.}$$

Mas $G_N(\omega)$ converge a zero em q.t.p. e é dominada pela função $g(\omega)+\sup_k g_k(\omega)$, e temos $\lim_N E\{G_N\} = 0$. Então combinando 2.2 com 2.3 implica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k(T^k\omega) = h(T) \quad \text{q.t.p.}$$

Mas como vimos antes, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k(T^k\omega) = -\frac{1}{n}\log(x_0(\omega),\dots,x_{n-1}(\omega))$ o que resulta em

$$\lim_{n\to\infty}\{-\frac{1}{n}\log\mu(x_0(\omega),\dots,x_{n-1}(\omega))\} = h(T) \quad \text{q.t.p.}$$

que era o que queríamos demonstrar.

Como uma consequência do Teorema anterior temos a propriedade de Equipartição da Entropia. [Propriedade de Equipartição da Entropia] Seja T um *shift* ergódico com entropia h. Então para qualquer $\epsilon > 0$ existe um inteiro positivo $b_0(\epsilon)$ tal que se $b \geq b_0(\epsilon)$ então ρ^b se decompõe em dois conjuntos $\mathcal{H}$ e $\mathcal{L}$ tal que

$$\sum_{u\in\mathcal{L}}\mu(u) = \mu\{(x_1,\dots,x_b)\in\mathcal{L}\} < \epsilon$$

e tal que

$$e^{-b(h+\epsilon)} < \mu(u) = \mu\{(x_1,\dots,x_b) = u\} < e^{-b(h-\epsilon)}$$

para qualquer b-upla u em $\mathcal{H}$.

Prova: Desde que $\lim_{n\to\infty}\{-\frac{1}{n}\mu(x_0(\omega),\dots,x_{n-1}(\omega))\} = h$, a convergência deste limite também ocorre na medida, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ existe um b_0 tal que $b \geq b_0$ implica que

$$\mu\{x : |\frac{1}{b}\mu(x_0,\dots,x_{n-1}) - h| \geq \epsilon\} < \epsilon$$

Seja $\mathcal{H}$ as b-uplas u para qual

$$|-\frac{1}{b}\log\mu(u) - h| < \epsilon$$

e seja $\mathcal{L}$ o complemento de H em ρ^b. Daí vemos que $\mathcal{H}$ e $\mathcal{L}$ satisfazem as condições dadas no corolário, o que completa a prova.

2.6 Entropia e Funções Exponenciais

Nessa seção obteremos, como uma consequência do corolário 2.5, uma relação entre a entropia de um sistema e o crescimento do seu número de órbitas.

Aqui tudo acontecerá dentro de uma classe de objetos que servem como um modelo para ZFC. Seja o conjunto $s = \{0,1,2,\dots,s-1\} \subset \omega_0$; Consideraremos as trajetórias simbólicas ω pertencentes a s^{Z}. O conjunto de todos os mapas totais de y em x será $[x^y]$ e, o de todos os mapas com domínio finito $C(y,x)$. Uma órbita será um elemento $\alpha_G \in [s^{\mathsf{Z}}]$ tal que se $G \subset C(\mathsf{Z}, s)$ é um filtro e $\bigcup G$ é um mapa total então $\alpha_G = \bigcup G$. Note que os cilindros são elementos de $C(x,y)$.

Dado um mergulho

$$N : C(\mathsf{Z}, s) \hookrightarrow s^{\mathsf{Z}}$$

$$p \in C(\mathsf{Z}, s) \rightarrow N(p) = \{\alpha \in [s^{\mathsf{Z}}] : p \subset \alpha\}$$

nós tomaremos $N(p)$ como uma base para a topologia de $[s^{\mathsf{Z}}]$. O que temos que fazer agora é definir uma medida sobre os elementos de $[s^{\mathsf{Z}}]$ que são as nossas trajetórias simbólicas. Denotemos por a o conjunto seguinte:

$$a = \{\alpha \in [s^{\mathsf{Z}}] : \alpha(0) = s_a \in s\}$$

onde $\alpha(0) = \alpha_0$ como definido na seção 2.1. Impomos para μ as seguinte restrições:

$$\mu(N(p)) \geq 0$$

$$\sum_{s_a \in s} \mu(a) = 1$$

que caracterizam μ4e como uma probabilidade. Temos ainda que para uma coleção contável $p_i \leq p$ (onde a ordenação é feita segundo a inclusão inversa), tal que $p_i \perp p_j$ (para $i \neq j$, p_i e p_j são incompatíveis), que implica $N(p_i) \cap N(p_j) = \emptyset$, e também que $\bigcup_i N(p_i) = N(p)$, teremos:

$$\mu(N(p)) = \sum_{\text{todos } i} \mu(N(p_i))$$

Finalmente, seja $p + (k)$, com $p \in C(\mathsf{Z}, s)$ e $k \in \mathsf{Z}$, denotando o elemento de $C(\mathsf{Z}, s)$ cujo domínio foi deslocado por k, ou seja, $\mathrm{Dom}(p + (k)) = \{n + k : n \in \mathrm{Dom}(p)\}$ e $(p + (k))(i + k) = p(i)$. Temos como consequência que

$$\mu(N(p + (k))) = \mu(N(p))$$

e o que temos é um *shift* estacionário, como o de Bernoulli. Nos limitaremos a *shifts* como esses, com a propriedade extra de serem ergódicos.

Consideremos uma trajetória $\alpha \in [s^{\omega_0}]$ e seja $B \subset [s^{\omega_0}]$ tal que $\mu(B) = 1$; seja também α_n o segmento inicial, com n símbolos, de α (ou seja, se $\alpha = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, \ldots)$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)$) e B_n o conjunto de todos os α_n. $F_B(n)$ é a função $F_B : \omega_0 \mapsto \omega_0$ definida por $F_B(n) = |B_n|$. Uma propriedade imediata dessa função é $F_B(n) \leq F_B(n+1)$. Com isso podemos definir a entropia de B_n, c. f. seção 2.4, como:

$$H(B_n) = -\sum_{\alpha_n \in B_n} \mu(N(\alpha_n)) \log \mu(N(\alpha_n))$$

onde $\alpha_n \in C(\omega_0, s)$. Disto temos a entropia de Shannon-Kolmogorov-Sinai, dada por:

$$h(B) = \lim_{n < \omega_0} (\frac{1}{n}) H(B_n)$$

O resultado que anunciamos anteriormente é o seguinte: Seja $\langle B, \mu \rangle$ um processo ergódico estacionário definido como anteriormente. Seja $\epsilon > 0$ um número real positivo; denotaremos por $f <^* g$, dadas funções f e g definidas de ω_0 em ω_0 ou R, se e somente se existe um $n_0 \in \omega_0$ tal que para todo $n_0 < n$, $f(n) < g(n)$. Então, $h(\langle B, \mu \rangle) = 0$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$, $|B_n| <^* 2^{\epsilon n}$.

Prova: Provemos primeiro que a condição é suficiente ($\rightarrow$).

Se $h(\langle B, \mu \rangle) = 0$ então, para todo o $\epsilon_n > 0$, dado um n, $-\frac{1}{n} \sum_{\text{todos } \alpha_n} \mu(\alpha_n) \log \mu(\alpha_n) < \epsilon_n$, $\alpha_n \in B_n$ (α_n é o segmento inicial com n símbolos das trajetórias de B).

Como sabemos, a medida equiprovável maximiza a entropia, e para todas as medidas sobre B_n vale

$$-\frac{1}{n} \sum_{\text{todos } \alpha_n} \mu(\alpha_n) \log \mu(\alpha_n) \leq \frac{1}{n} \log F_B(n)$$

Consideremos o caso da medida equiprovável, posto que esse caso implica nas outras situações. Com isto temos

$$\frac{1}{n} \log F_B(n) < \epsilon_n$$

ou seja

$$\log(F_B(n))^{1/n} < \epsilon_n$$

o que implica em

$$F_B(n) < 2^{\epsilon_n n}$$

(com log na base 2) para todo o n.

($\leftarrow$)

Peguemos $F_B(n) < 2^{\epsilon_n}$, $n > n_0$; nós temos

$$\frac{1}{n} \log F_B(n) < \epsilon_n, \quad rm para\ todo\ o\ n$$

na qual, como a medida equiprovável μ_0 majora todas as entropias, significa que

$$0 = h(B, \mu) \leq h(B, \mu_0) = 0$$

Seja (B, μ) um *shift* ergódico. Pelo corolário 2.5, para $h = 0$ temos que

$$\sum_{\alpha_n \in \mathcal{L}_n} \mu(\alpha_n) < \epsilon$$

$$0 \leq \mu(\alpha_n) \leq 2^{-\epsilon h}$$

$$\alpha_n \in \mathcal{H}_n$$

Com isso

$$\mu(\mathcal{L}_n) < \epsilon$$

$$\mu(\mathcal{H}_n) \leq |\mathcal{H}_n| 2^{-\epsilon n} \leq f(n) 2^{-\epsilon n}$$

Como $f(n)$ é subexponencial para $h = 0$, temos como resultado que

$$\mu(B_n) < \epsilon + f(n)2^{-\epsilon n} \to 0$$

Para generalizarmos o resultado anterior precisamos de alguns lemas. A entropia relativa $H(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$ se anula se e somente se $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$ ($\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$: todo o átomo de $\mathcal{P}$ é uma união de átomos de $\mathcal{Q}$).

Prova: Veja Mané [37] pag. 276. $h(T, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} H(\mathcal{P}|T^{-1}\mathcal{P} \vee \ldots \vee T^{-n}\mathcal{P})$.

Prova: Veja Mané [37] pag. 278.

Pelos dois lemas anteriores (2.6 e 2.6) a antropia $h(T, \mathcal{P})$ se anula se e somente se $\lim_{n\to\infty} H(\mathcal{P}|T^{-1}\mathcal{P} \vee \ldots \vee T^{-n}\mathcal{P}) = 0$. Então $h(T, \mathcal{P}) = 0 \leftrightarrow \forall n > n_0 \exists \epsilon_n (\lim_{n\to\infty} H(\mathcal{P}|T^{-1}\mathcal{P} \vee \ldots \vee T^{-n}\mathcal{P})) < \epsilon_n$, o que resulta em,

$$h(T, \mathcal{P}) = 0 \leftrightarrow \frac{1}{n} H(\mathcal{P}|\overline{T}^{-1}\mathcal{P} \vee \ldots \vee \overline{T}^{-(n-1)}\mathcal{P}) < \epsilon_n,$$

É fácil ver que $|\mathcal{B}_n| = f(n) = \#$ de átomos $(\mathcal{P}|\overline{T}^{-1}\mathcal{P} \vee \ldots \vee \overline{T}^{-(n-1)}\mathcal{P})$, e temos que a entropia anterior pode ser posta como $\frac{1}{n}(-\sum_{\text{átomos}} \mu(\alpha_i) \log \mu(\alpha_i)) < \epsilon_n$.

Pelo teorema de Shannon-MacMillan-Breiman, as trajetórias se dividem em duas partes tais que:

1^a **parte:** $\mu(\alpha_i) \sim \frac{1}{f(n)}$;

2^a **parte:** entropia tende a zero.

onde na primeira parte estimamos uma medida equiprovável, o que não afeta nosso resultado pois torna a entropia máxima. Com isso temos $\frac{1}{n} \log f(n) < \epsilon_n$, ou $f(n) < 2^{\epsilon_n}$, para todo o ϵ_n.

Chapter 3

Objetos Genéricos e suas Aplicações à Física

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos alguns exemplos de proposições formalmente indecidíveis face aos axiomas de ZF, tanto em teorias físicas como em matemática. Faremos isto exibindo predicados conjuntistas e, posteriormente, mostrando que esses predicados podem ser verdadeiros num modelo e falsos noutro. Antes de apresentarmos essas proposições, precisamos de alguns conceitos preliminares.

Começemos examinando o que vem a ser o *Universo Construtivel de Gödel*, denotado usualmente por **L**. **L** é uma classe própria do Universo de Von Neumman **V** (também conhecido como *Universo Bem Fundado*) e, intuitivamente, é o modelo no qual todos os subconjuntos de um dado conjunto A são definíveis por meio de um predicado sobre a linguagem formal que utilizamos (no nosso caso $L_1^=$). Podemos definir o universo construtível como:

L é a menor classe própria de **V** que é transitiva e que contém todos os cardinais.

Da definição 3.1 não é claro o motivo de **L** ser chamado *Universo Construtível*. Uma definição mais direta é dada, conforme Krivine [33], da seguinte maneira:

Sejam dois conjuntos x e y tal que $y \subseteq x$. y é uma parte definível de x, com parâmetros, se existe uma sentença $\phi(w, a_1, \ldots, a_k)$ com uma variável livre w e com parâmetros $a_1, \ldots, a_k \in x$, cujo valor em x é y. Definimos $k = \Pi(x)$ como "k é o conjunto das partes de x definíveis por parâmetros".

Formamos a coleção de conjuntos construtíveis a partir de ϕ de maneira análoga a **V**.

A coleçã **L** dos conjuntos construtíveis é definida por indução como:

$$L_0 = \emptyset$$

$$\vdots$$
$$L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Pi(L_\beta), \quad \mathrm{Ord}(\alpha)$$

e $\mathbf{L} = \{x : \exists\alpha(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x \in L_\alpha)\}$. x é construtível, denotado por $L(x)$, se $x \in \mathbf{L}$.

Aos axiomas ZF podemos acrecentar o chamado *Axioma da Construtibilidade*, denotado $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, que é a sentença: $\forall x L(x)$. $\mathbf{L} \models$ ZFC + GCH *Prova*: Veja Kunen [34], Manin [38] ou Krivine [33].

Outro axioma que pode ser adicionado à ZF é o de Martin (veja [2], [34] ou [30]), e pode ser definido como afirmação: Nenhum espaço compacto de Hausdorff que obedece à c.c.c. é a união de $< 2^{\omega_0}$ conjuntos fechados nunca densos (Kunen [[34]], pag. 52). O axioma de Martin (MA) pode ser visto como uma sentença reguladora. Se MA é verdadeiro, pode-se mostrar que, se $\omega_0 < k < 2^{\omega_0}$, então $2^k = 2^{\omega_0}$. Para exibirmos uma sentença indecidível numa teoria, precisamos, antes de mais nada, passar esta teoria para uma linguagem formal, que no nosso caso será a $L_1^=$. Tal formalização pode ser feita usando-se o conceito de *estruturas matemáticas* de Boubarki ou os *predicados conjuntistas* de Suppes (como em da Costa e Doria [13]). Da Costa e Chuaqui [12] mostraram que ambas as formalizações são, de certo modo, equivalentes.

Uma estrutura matemática E é uma coleção finita e ordenada de conjuntos de nível finito (um conjunto x é de nível finito se existe um α, tal que $x \in L_\alpha$ e α é finito) sobre a união dos domínios de duas sequências finitas de conjuntos $X_1, \dots, X_m$ e $Y_1, \dots, Y_n$, tal que $m > 0$ e $n \geq 0$. Estes conjuntos X_i e Y_i são conhecidos como conjuntos de base, sendo X_i a base principal e Y_i a base auxiliar. O predicado de Suppes é uma fórmula da teoria de conjuntos da forma:

$$P(E, X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$$

na qual as únicas variáveis livres em P são E, $X_1, \dots, X_m$, $Y_1, \dots, Y_n$. Esta fórmula especifica a construção na T.A.C. de E, a partir de dois tipos de conjuntos base, e também os axiomas para as espécies de estruturas no qual estamos interessados. Os conjuntos de base principais podem variar e os conjuntos de base auxiliares são mantidos fixos. Com a variação dos $X_1, \dots, X_m$ temos as espécies de estruturas. Isto pode ser posto de uma maneira mais explícita escrevendo-se o predicado de Suppes de E da maneira seguinte:

$$Q(E) \leftrightarrow \exists X_1, \dots, X_m P(E, X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$$

Vejamos um exemplo:

Seja x um conjunto e τ uma coleção de subconjuntos de x, tal que possuam as propriedades seguintes:

$A - I$ $\emptyset$, $x \in \tau$;

$A - II$ A união de qualquer coleção de conjuntos de τ pertence a τ;

$A - III$ A interseção de qualquer número finito de conjuntos de τ pertence a τ.

A coleção t de conjuntos é chamada topologia em x; x é um *espaço topológico.*

Um espaço topológico pode então ser formalizado como o par $H = \langle x, \tau \rangle$ cujo predicado de Suppes é:

$$P(H, x) \leftrightarrow \exists \tau (H = \langle x, \tau \rangle \wedge \tau \subseteq \mathcal{P}(x) \wedge AI \wedge AII \wedge AIII)$$

ou

$$Q(H) \leftrightarrow \exists x P(H, x)$$

3.2 A Entropia como um Conceito Não–Absoluto

Dissemos no capítulo 2 que os *shifts* ergódicos aparecem em várias situações relevantes em Física. Nessa seção obteremos que um *shift* de Bernouilli fica com entropia nula quando mudamos nosso modelo para os axiomas de ZFC (veja [11]).

Como no capítulo 2, seja p um número inteiro, e $[p^{\omega_0}] \subset p^{\omega_0}$ o conjunto de todas as funções totais de $\aleph_0$ em p. Dizemos que $[p^{\omega_0}]$ é o espaço dos *shifts.* Seguindo a caracterização de Chaitin, dizemos que um mapa $\sigma \in [p^{\omega_0}]$ é determinístico se ele pode ser gerado por um algorítmo (programa de computador), aplicado sobre uma entrada de dados finita, ou seja, se a sequência total pode ser comprimida numa sequência finita. A cardinalidade de $[p^{\omega_0}]$ é $2^{\aleph_0}$, e a cardinalidade do conjunto de todos os mapas determinísticos, chamado Σ, é o infinito contável. Σ é denso na topologia usual de $[p^{\omega_0}]$. Se tiramos Σ de $[p^{\omega_0}]$ obtemos o conjunto $p \cdot Ir$, ou seja, o conjunto de todas as p-sequências irracionais (não determinísticas). Se pegarmos $Ir \subset [0, 1]$, os irracioanis contidos no intervalo $[0, 1]$, pode-se mostrar que existe um homomorfismo entre este conjunto e $p \cdot Ir$, isto é, $p \cdot Ir \cong Ir$. Como Σ será o nosso espaço de *shifts*, dotamos p de uma medida equiprovável.

Seja $B \in \mathbf{V}$ uma álgebra booleana completa, que obedece à condição da cadeia contável, tal que, ao tomarmos a extensão booleana $\mathbf{V}^B$ de $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^B \models$ ZFC + Axioma de Martin + $2^{\aleph_0} = \kappa > \aleph_1$. $\mathbf{V}^B \models |(\widehat{p \cdot Ir})| = \aleph_{\hat{1}} < 2^{\aleph_0}$. *Prova:* $\mathbf{V}^B \models |(\widehat{p \cdot Ir})| = |\widehat{\mathcal{P}(\hat{\omega_0})}| = \aleph_{\hat{1}}$.

Como a cardinalidade de $(\widehat{p \cdot Ir})$ é $\aleph_{\hat{1}}$, então este conjunto é obrigatoriamente diferente de $(p \cdot Ir)^B$, cuja cardinalidade é $2^{\aleph_0}$. Se $\mathbf{V}^B \models$ "$(\widehat{p \cdot Ir}) \in (p \cdot Ir)^B$, junto com uma medida induzida", então $\mathbf{V}^B \models$ "A entropia por símbolo do *shift* cujo espaço de fase é $(\widehat{p \cdot Ir})$ é zero". *Prova:* Resulta do lema seguinte, Suponha que o axioma de Martin seja verdadeiro. Seja $X_\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha < \kappa$ e $\aleph_0 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ sejam conjuntos de medida nula. Então $\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ tem medida nula. *Prova:* Veja Kunen [34] pag. 59 ou da Costa e Doria [13].

Como $\mathbf{V}^B \models |\widehat{(p \cdot Ir)}| < 2^{\aleph_0}$ (pois B obedece à c.c.c.), então, pelo axioma de Martin, $\mathbf{V}^B \models \mu[\widehat{(p \cdot Ir)}] = 0$. Com isto temos $\mathbf{V}^B \models h[\widehat{(p \cdot Ir)}] = 0$. Então, como resultado imediato temos $\mathbf{V}^B \models \mu[p \cdot Ir - \widehat{(pxIr)}] = p$ e a nossa proposição.

Com isto vimos que processos cuja entropia é positiva num modelo podem ter entropia nula noutro.

Um outro resultado que podemos obter, para que possamos entender melhor o conceito de entropia é a proposição seguinte: O conjunto das trajetórias cuja entropia é zero é um conjunto residual. *Prova:* Seja $B \cdot Ir \subset [0, 1]$ os irracionais binários. Seja $f : \omega_0 \mapsto \omega_0$ uma função monotonamente não-decrescente tal que $f(0) = 1$. Existe uma aplicação 1–1 entre funções monotonamente não-decrescentes, representadas por $\mathcal{CE}$ (de crescentes eventualmente), e os irracionais binários. *Prova do Lema:* Seja $\alpha \in B \cdot Ir$ uma sequência de zeros e uns. Construimos a partir desta sequência uma função $f \in \mathcal{CE}$ da maneira seguinte: $f(n) =$ (número de zeros entre o n-ésimo um e o início de α); como exemplo imaginemos a sequência $\alpha = 00111001\ldots$, e temos, para esta sequência, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 2$, $f(4) = 4$ e assim por diante. Usando-se a mesma aplicação anterior, é fácil ver que a cada $f(n)$ corresponderá uma sequência $\alpha \in B \cdot Ir$.

Como vimos no fim do capítulo dois, temos uma aplicação (que não é obrigatoriamente 1–1) entre algumas partições $(\mathcal{P} \vee T^{-1}\mathcal{P} \vee \ldots \vee T^{-n(n-1)}\mathcal{P})$ sobre o número de átomos dessa partição. Via Lema 3.6', temos então uma aplicação dos espaços de partição nos binários irracionais. Como o teorema de Shannon-MacMillan-Breiman trata de comportamentos assintóticos, podemos ignorar os segmentos iniciais das sequências a e obter o lema, O conjunto das sequências binárias que coincidem sempre, a menos de um segmento inicial, é um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em $B \cdot Ir$. *Prova do Lema :* Que $\mathcal{U}$ é um filtro é imediato. Como as sequências coincidem a menos de um segmento inicial então $\mathcal{U}$ é um filtro maximal, portanto um ultrafiltro.

Contruimos agora o conjunto $B \cdot Ir/\mathcal{U}$ dotado da topologia quociente. Pelos lemas anteriores sabemos que existe uma aplicação do espaço das partições sobre $B \cdot Ir/\mathcal{U}$. Mas, funções que crescem exponencialmente estão relacionadas a binários não-normais (um binário é normal se a razão entre o número de zeros e uns tende para 1/2). Então estas funções são de medida nula em $B \cdot Ir$ e são um conjunto magro, o que completa a demonstração, pois pela Proposição 2.9 estas funções são as responsáveis pela parte não-nula da entropia.

3.3 Um Exemplo no Eletromagnetismo Clássico

Como vimos na seção anterior, podemos formalizar várias teorias matemáticas via o conceito de estruturas. Isto pode ser feito, em particular, para as teorias físicas, como a mecânica clássica, a mecânica quântica, a Relatividade Geral ou o eletromagnetismo (cf. ref. [13], [14], [15]).

Nessa seção examinaremos o caso do eletromagnetismo clássico e, a partir de sua formalização, construiremos uma proposição indecidível nessa teoria (veja [15]). Trabalharemos sempre com o sistema de axiomas ZFC e, quando for necessária a inclusão de algum outro axioma, isto será dito explicitamente.

Um campo eletromagnético será, para nós, um conjunto cuja estrutura pode ser deduzida do par ordenado $\langle M, U(1)\rangle$, onde M é a variedade espaço-temporal e $U(1)$ é o grupo do círculo, i. e., $U(1)$ é o grupo das transformações unitárias com um único parâmetro (para uma revisão dos conceitos de geometria diferencial veja [19] ou [22]). O nosso espaço-tempo M é uma variedade quadridimensional, Hausdorff e de classe C^∞, dotada de uma métrica lorentziana ([19]). Sabemos que um campo eletromagnético F tem que obedecer à equação de Maxwell:

$$dF = 0$$

Seja $\Lambda^2 T^* M$ o espaço fibrado das 2-formas sobre M, e seja $\mathcal{D}(M)$ o grupo de todos os difeomorfismos de classe C^∞ sobre M. Peguemos agora $C^\infty(\Lambda^2 T^* M)$ como sendo o conjunto de todas as seções de corte C^∞ de $\Lambda^2 T^* M$. Se $Z^2(M) \subset C^\infty(\Lambda^2 T^* M)$ é o espaço de todos os 2-cociclos em M, isto é, de todas as 2-formas cuja derivada exterior é nula, podemos fazer a seguinte definição: $EM = Z^2(M)/\mathcal{D}(M)$ é o espaço de todos os campo eletromagnéticos sobre M.

Uma rápida olhada nos mostra que a definição supra está de acordo com a dada usualmente para um campo eletromagnético (uma outra maneira de formalizarmos o eletromagnetismo pode ser encontrada em [14]), e que se F é um tal campo, então $F \in EM$ (veja [22] e [20]). A divisão feita entre $Z^2(M)$ e $\mathcal{D}(M)$ é necessária se quisermos que dois campos sejam iguais a menos de uma transformação de coordenadas.

Como $Z^2(M)$ tem uma base contável, EM também tem. Com isto, e acrecentando o fato de que EM é um espaço completo e métrico, concluimos que o espaço de todos os campos eletromagnéticos é um espaço polonês (cf. [13]; sobre as propriedades de um espaço polonês veja [52]). Consideremos o sistema ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_\lambda > \aleph_1$ + MA. Então, se $(\ldots)^{\mathbf{L}}$ denota os conjuntos construtíveis, no sentido de Gödel, na nossa teoria,

i) $(EM)^{\mathbf{L}}$ é magro em EM;

Se $(...)^B$ denota a restrição a uma subclasse de conjuntos que ainda obedecem ao MA junto com o menor valor de cardinal para o contínuo, temos:

ii) $(EM)^B$ é magro em EM.

Prova: Ver em da Costa e Doria [13]. Seja x um conjunto e $\mathbf{L}(x)$ a classe de todos os conjuntos que podem ser construídos, no sentido de Gödel, de x. Dizemos que y pode ser obtido de x se e somente se $y \in \mathbf{L}(x)$.

Desde já, podemos ver que a definição anterior pode ser pensada como um processo qualquer que, usando o objeto x, obtemos, a partir de uma série de cálculos, o objeto y. Esta é uma caracterização bem liberal, que pode abranger vários conceitos em eletromagnetismo, como, por exemplo, a aproximação de um dado campo por outro, posto que ela exige que um dado y seja derivado de x por uma série de construções predicativas.

Com essa definições em punho, podemos estabelecer o nosso principal resultado nesta seção. A sentença: "Todo o campo eletromagnético pode ser obtido de qualquer conjunto de campos que seja denso e que tenha a cardinalidade do contínuo, no espaço EM." é indecidível em ZFC. *Prova:* Chamemos a sentença entre aspas, da proposição anterior, de φ. Em ZFC + $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, $(\mathsf{R})^{\mathbf{L}}$ é denso em R. *Prova do Lema:* Numa teoria em que vale o axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, todos os elementos são construtíveis. Como $(\mathsf{R})^{\mathbf{L}}$ é o conjunto dos reais construtíveis no modelo, e R representa os reais nesse modelo, sabendo que R é contrutivo (pois $\mathbf{V} = \mathbf{L}$), temos que $(\mathsf{R})^{\mathbf{L}}$ é denso em R.

ZFC + $\mathbf{V} = \mathbf{L} \models \varphi$. *Prova do Lema:* Dos axiomas ZFC, pode-se obter, como um teorema de ZFC, que, dados os irracionais, $Ir \subset [0, 1]$, existe uma função que é contínua, aberta e sobrejetora, da forma $f : Ir \mapsto Z^2(M)/\mathcal{D}(M)$. Então, no universo construtível de Gödel, temos uma função $f^{\mathbf{L}} : (Ir)^{\mathbf{L}} \mapsto (EM)^{\mathbf{L}}$ que tem as propriedades supracitadas. Mas, todo $x \in (Ir)^{\mathbf{L}}$ pode ser construído (no sentido de Gödel) de um subconjunto denso, via cortes de Dedekind. Usando então a função $f^{\mathbf{L}}$ (que existe em consequência de ZFC), todos os $(EM)^{\mathbf{L}}$ podem ser obtidos a partir de um subconjunto denso e contável. ZFC + $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ + GCH $\models \neg\varphi$. *Prova do Lema:* Neste sistema de axiomas $|(Ir)^{\mathbf{L}}| = 2^{\aleph_0}$, e então, como a função f descrita na demonstração do lema anterior também existe aqui, $|(EM)^{\mathbf{L}}| = 2^{\aleph_0}$. Pelo lema 3.2, $(EM)^{\mathbf{L}}$ é denso em EM. Contudo, $EM - (EM)^{\mathbf{L}}$ não pode ser obtido de um subconjunto de campos que é construtível, incontável e que tem a cardinalidade do contínuo.

Dos lemas 3.3 e 3.3, concluimos que existe um modelo em que φ é verdadeira e outro em que φ é falsa, ambos sendo modelos para ZFC. Com isto completa-se a demonstração.

3.4 Sobre a Existência de Espaços–Tempo Genéricos

Estamos interessados aqui na existência de variedades genéricas na Relatividade Geral. Para tal, usando as ferramentas esboçadas na seção 3.1, por da Costa e Chuaqui ([12]), descrevemos intuitivamente como é feita a formalização da Relatividade Geral ([14] ou [16]). Nosso ponto de partida são os números reais, contruidos a partir dos inteiros via cortes de Dedekind obtidos com o uso dos axiomas de Zermelo-Fraenkel. Via Predicados de Suppes construimos as estrutursas algébricas necessárias (para detalhes veja os exemplos dados em [14]) tais como grupos, aneis, corpos, etc...

Uma variedade diferenciável (que será o nosso espaço-tempo) é construida com dois conjuntos: Um espaço métrico separável e completo X, que será o conjunto de base principal, mais o conjunto dos reais, que servirá como base auxiliar. De $X \cup \mathsf{R}$ podemos obter R e R^n aplicando-se o axioma do conjunto potência construimos os conjuntos R^X e $(\mathsf{R}^n)^X$. Se k denota um critério de diferenciabilidade, podemos obter, a partir do axioma da separação, os subconjuntos

$$k(X, \mathsf{R}) \subset \mathsf{R}^X$$
$$k(X, \mathsf{R}^n) \subset (\mathsf{R}^n)^X$$
$$k(\mathsf{R}^n, \mathsf{R}^n) \subset (\mathsf{R}^n)^{\mathsf{R}^n}$$
$$k(X, X) \subset X^X$$

necessários à construção do predicado de Suppes. Este predicado será uma união dos axiomas que caracterizam uma variedade diferencial real de dimensão finita.

Dada uma variedade diferenciável M, que é definida relacionando-se em ZFC domínios locais de M em R^n, formemos o fibrado tangente T^*M e o fibrado cotangente $T^{-1}.M$. Do produto tensorial, para $n = 4$, que é a dimensão do espaço-tempo, obtemos um co-tensor de segunda ordem g, a métrica, que será não degenerada e de assinatura $+2$.

Da maneira precedente podemos formalizar todos os pricipais objetos usados na Relatividade Geral e, com isto, mostra-se a existência destes objetos em ZFC.

Seja agora $\mathcal{C}$ uma 4-variedade cilíndrica, isto é, da forma $C \times \mathsf{R}$, onde C é uma 3-variedade compacta, real, lisa e tipo Hausdorff. Dotamos $\mathcal{C}$ de um tensor métrico lorentziano tal que para $x \in \mathsf{R}$, $C \times x$ é uma superfície tipo espaço.

Mostraremos que, se o espaço-tempo é uma variedade cilíndrica, então não existem espaços-tempo genéricos. Este resultado é obtido a partir de uma série de proposições, que serão postas a seguir.

ZFC $\vdash$ "O conjunto de todas as classes de difeomorfismos dos espaço-tempo cilíndricos é contável". *Prova:* Primeiro mostraremos que existem $\aleph_0$ espaços-tempo cilíndricos, para depois mostrarmos que existem no máximo $\aleph_0$.

Para que existam pelo menos $\aleph_0$ 4-variedades cilíndricas, temos que mostrar existirem pelo menos $\aleph_0$ 3-variedades compactas. Existem $\aleph_0$ 2-variedades compactas, como consequencia do teorema da classificação (veja [32]). Se N é uma variedade dois-dimensional e compacta, então $N \times S^1$ é uma 3-variedade compacta, pois o círculo S^1 é compacto. Com isto temos que existem pelo menos $\aleph_0$ 3-variedades compactas e, como consequência, pelo menos $\aleph_0$ espaços-tempo compactos.

Existem no máximo $\aleph_0$ 3-variedades compactas, pois todas as 3-variedades são trianguláveis (veja [41]). Podemos com isso dividir a variedade num número finito de 3-simplices. Cada decomposição pode ser codificada por uma sequência finita de símbolos, e o número total de sequências deste tipo é no máximo $\aleph_0$.

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto de todos os espaçosa-tempo cilíndricos. Pela definição de cardinalidade, obtemos o seguinte corolário da proposição anterior: i) ZFC $\vdash$ "Existe uma função $f : \omega_0 \mapsto \mathcal{M}$ que é sobrejetora e 1-1".

ii) ZFC $\vdash$ "Para todo n, $n \in \omega_0$ se e somente se $M_n = f(n) \in \mathcal{M}$". *Prova:* Imediata.

Seja agora B uma álgebra booleana completa. Temos: $\|M_n \in \mathcal{M}\| = \bigvee_{m\in\omega_0} \|\hat{m} = n\|$. *Prova:* Pelo corolário anterior temos que ZFC $\vdash$ "$\forall n[(n \in \omega_0) \leftrightarrow M_n \in \mathcal{M}]$". Desta expressão obtemos $\|n \in \omega_0\| = \|M_n \in \mathcal{M}\| = \bigvee_{m\in\omega_0} \|\hat{m} = n\|$. $\mathbf{V}^B \models \mathcal{M} = \hat{\mathcal{M}}$. *Prova:* Imediata.

O corolário 3.4 nos diz que o conjunto de todos os espaços-tempo cilíndricos é um conjunto *standard* numa extensão booleana $\mathbf{V}^B$.

Vejamos agora se existem espaços-tempo genéricos se a variedade é não compacta. Começaremos com a proposição seguinte: Seja M uma variedade quadridimensional real, lisa e não compacta. Então ZFC *vdash* "M admite um tensor métrico não degenerado e lorentziano". *Prova:* veja Steenrod [49].

Com isto, em oposição aos espaços-tempo cilíndricos (Proposição 3.4), obtemos: ZFC *vdash* "Existem $2^{\aleph_0}$ classes de difeomorfismo das 4-variedades reais e não-compactas". *Prova:* A demonstração segue a da proposição 3.4, ou seja, primeiro provamos ser no máximo $2^{\aleph_0}$ e depois provamos ser no mínimo $2^{\aleph_0}$.

Para tal, seja uma aplicação $\varphi : \omega_0 \mapsto T^2$ de ω_0 em um 2-torus, isto é, a cada inteiro n associamos um torus $T^2 = S^1 \times S^1$ representado por $T^2(n)$. Formemos com isto a soma conexa $\#\sum_{i\in\omega_0} T^2(i)$, que representa uma cadeia linear com vários tori, da forma $\ldots \# T^2(n-1)\# T^2(n)\# T^2(n+1)\# \ldots$. Obviamente se $T^2(n)$ é lisa, então $\#\sum_{i\in\omega_0} T^2(i)$ também é.

Para estabelecermos uma relação entre as 2-variedades e o contínuo, faremos o seguinte: Seja uma sequência binária $\alpha \in B \cdot Ir \subset 2^{\omega_0}$, onde $B \cdot Ir$ são os irracionais binários, cuja cardinalidade é $2^{\aleph_0}$; formamos de α a partir de $\#\sum_{i\in\omega_0} T^2(i)$ uma nova variedade, obtida de acordo com as regras:

Se $\alpha(n) = 0$, não fazemos nada;

Se $\alpha(n) = 1$, somamos conexamente à $\# T^2(i) \subset \#\sum_{i\in\omega_0} T^2(i)$ um outro torus T^2;

Para exemplificarmos o procedimento, considermos a cadeia original $\#\sum_{i\in\omega_0} T^2(i)$ esquematizada abaixo: Se a sequência a for da forma 0100010 . . ., pelas regras anteriores obteremos a cadeia seguinte:

Se denotamos por M_α a nova variedade construida a partir do irracional α, é facil ver que se $\alpha, \beta \in B \cdot Ir$, $\alpha \neq \beta$ se e somente se $M_\alpha \ncong M_\beta$, onde $\ncong$ significa "não homeomorfo a".

Com isto, vimos que o conjunto $\{M_\alpha : \alpha \in B \cdot Ir\}$ tem a cardinalidade do contínuo, e então as variedades da forma $\{\mathsf{R}^{n-2} \times M_\alpha : \alpha \in B \cdot Ir\}$ formam um conjunto de variedades não-compactas e não-difeomorfas cuja cardinalidade é $2^{\aleph_0}$.

Falta-nos mostrar que existem no máximo $2^{\aleph_0}$ variedades não-compactas. Para tal, lembremos que toda a variedade diferenciável é paracompacta, o que implica existir um refinamento local finito para a cobertura contável, pois as variedades que estamos lidando são não-compactas (para tais definições veja Borisovich et al. [7]). Então, toda variedade não-compacta e diferenciável pode ser representada por uma cobertura localmente finita mais um conjunto contável de funções de transição. O conjunto de todos estes objetos devidamente codificados tem uma cardinalidade no máximo igual à do contínuo. ZFC $\vdash$ "Existe uma função 1–1 e sobrejetora $f : 2^{\omega_0} \mapsto \mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$ é o conjunto de todas as variedades não compactas que admitem espaço-tempo". *Prova:* Imediata.

Seja agora $\mathbf{V}$ um modelo para ZFC mais a hipótese generalizada do contínuo e o axioma da contrutibilidade, isto é, $\mathbf{V} \models$ ZFC + GCH + $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Em $\mathbf{V}$ temos a álgebra de Boole $B = RO(2^{\omega_0 \times \omega_1})$, e podemos com isto construir a extensão booleana $\mathbf{V}^B$. Como sabemos, $\mathbf{V}^B \models$ ZFC + CH. $\mathbf{V}^B \models$ "Existem $2^{\hat{\aleph_0}}$ subconjuntos genéricos de $\hat{\omega}_0$. *Prova:* Veja Bell [2]. $\mathbf{V}^B \models$ "Existem $2^{\aleph_0}$ variedades genéricas que admitem espaços-tempo". *Prova:* Pelo Lema anterior, temos $2^{\hat{\aleph_0}}$ subconjuntos genéricos de $\hat{\omega}_0$. Mas, pela Proposição 3.4, concluimos que existem $2^{\hat{\aleph_0}}$ variedades genéricas.

Examinemos com mais detalhe estas variedades genéricas.

Um espaço-tempo é um par ordenado $langleM, g\rangle$, onde g é uma métrica lorentziana e M uma 4-variedade separável e tipo Hausdorff. Seja X uma cobertura contável para M, $X = \{U_i : i \in \omega_0\}$ tal que:

i) $\bigcup_{i\in\omega_0} U_i = M$;

ii) Para $i \neq j$, é falso que $U_i \subseteq U_j$ ou $U_j \subseteq U_i$.

ZFC $\vdash$ "Seja $f \in 2^{\omega_0}$, e associemos a cada f um subconjunto $X_f \subset X = \{U_i : i \in \omega_0\}$, dado da maneira seguinte:

$U_i \in X_f$ se e somente se $f(i) = 1$;

$U_i \notin X_f$ se e somente se $f(i) = 0$.

Então:

a) $\bigcup V_j$, para todo $V_j \in X_f$, é um aberto;

b) Para $f \neq f'$, $\bigcup_{V_j\in X_f} V_j \neq \bigcup_{W_k\in X_{f'}} W_k$, f e $f' \in 2^{\omega_0}$"

Prova: Imediata.

Seja agora $\mathbf{V}$ o universo bem fundado, e seja $B = RO(2^{\aleph_0})$ uma álgebra de Boole em $\mathbf{V}$, isto é, $B \in \mathbf{V}$. Então: $\mathbf{V}^B \models$ "Existe um conjunto aberto $U \subset \hat{M}$ tal que para todo o conjunto aberto standard $\hat{V} \subset \hat{M}$, temos $U \neq \hat{V}$". Prova: Em $\mathbf{V}^B \models \widehat{(2^{\hat{\omega_0}})} \nsubseteq 2^{\hat{\omega_0}}$. Peguemos um f tal que $\mathbf{V}^B \models f \in 2^{\hat{\omega_0}}$ e tal que para, todo o elemento $\hat{g}$ que seja standard, temos $f \neq \hat{g}$. Então, $\mathbf{V}^B \models$ "Para todo o $\hat{g} \in 2^{\hat{\omega_0}}$, $\bigcup_{V_{\hat{j}}\in X_f} V_{\hat{j}} \neq \bigcup_{W_{\hat{k}}\in X_{\hat{g}}} W_{\hat{k}}$.

Então, quando vamos para a extensão booleana $\mathbf{V}^B$ de $\mathbf{V}$, concluimos que $\mathbf{V}^B$ tem mais conjuntos abertos, que são os abertos genéricos. Podemos, a partir disto, formular a seguinte pergunta: Trazem estes abertos alguma informação adicional, do ponto de vista da física ? De outra maneira, existe alguma experiência que possa detectar esses novos abertos?

Tentemos clarear estas questões através de alguns resultados e exemplos envolvendo os conjunto abertos genéricos. $\mathbf{V}^B \models$ "Toda bola aberta $U \subset M$ é difeomorfa a uma bola aberta standard $\hat{W} \subset M$". *Prova:* Imediata, pois todas as bolas abertas são difeomorfas entre si na variedade M. $\mathbf{V}^B \models$ "Se $K \subset M$ é compacta, então K é standard". *Prova:* Se K é compacta, então só existem $\aleph_0$ subvariedades com esta propriedade (mostra-se de maneira similar à proposição 3.4). Com isto todas as subvariedades K que são compactas são também standard.

Daremos agora alguns exemplos que explicitam mais como os conjuntos abertos genéricos em M podem ser difeomorfos a abertos standard. Nossos exemplos serão dados em uma extensão por forcing $\mathbf{V}(B)$ do universo booleano $\mathbf{V}^B$.

Exemplo 1: Seja R, a reta real, coberta com uma coleção contável de intervalos abertos centrados em cada $x \in \mathsf{Z}$, e com diâmetro igual a $1+\epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$. Se X é tal cobertura, qualquer $\bigcup_{V_i \in Y} V_i$, $Y \not\subset X$ será aberta e desconexa. Dado $\mathbf{V}^B$, seja $\mathbf{M}[G]$ o modelo por forcing associado a $\mathbf{V}^B$ (veja Kunen [34]). Seja ainda u um objeto não standarrd em $\mathbf{M}[G]$. Então, o aberto (em $\mathbf{M}[G]$) $X_u = \bigcup_{i \in u} V_i$ tem $\aleph_0$ pedaços. Mas X_u é difeomorfo (em $\mathbf{M}[G]$) a $Z = \bigcup i$ parV_i, que é claramente um conjunto standard.

Exemplo 2: Em $\mathbf{M}[G]$, cubramos R^2 com um conjunto contável de quadrados abertos centrados em cada $x \in \mathsf{Z}^2$ e com lados iguais a $1+\epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$, paralelos aos eixos coordenados. Restringiremos a nossa atenção ao primeiro quadrante. Como a cobertura é contável, podemos associar a cada quadrado aberto um número inteiro. Com isto, podemos conectar cada centro de quadrado por uma linha contínua.

Dada tal enumeração, e para um u genérico (como no exemplo anterior), tiramos os quadrados abertos cujos índices caiam sobre u. Temos então um plano com $\aleph_0$ buracos nos x em u.

Desde que podemos traçar uma linha contínua através de todos os pares positivos com coordenadas integrais em R^2, podemos "esticar" esta linha, tal que os buracos que formamos em R^2 irão cair, digamos, na primeira coluna do quadrante positivo. Temos novamente um conjunto aberto genérico (o plano sem os buracos nos lugares codificados por u) que é difeomorfo a um conjunto standard aberto em R^2.

Pela construção do exemplo anterior, vemos que ele pode facilmente ser generalizado para dimensões superiores a dois, sendo válido para qualquer R^n, $n \in \omega_0$.

Exemplo 3: Seja dada uma cadeia infinita de tori $\# \sum_{i \in \omega_0} T^2(i)$, como a vista anteriormente, em $\mathbf{M}[G]$. Esta variedade é claramente standard. Seja agora dada uma função característica $f_u \in \mathbf{M}[G]$ para um subconjunto genérico $u \subset \hat{\omega}_0$, e corte um disco de cada torus $T^2(i) \subset \# \sum_{i \in \omega_0} T^2(i)$ se e somente se $f_u(n) = 1$ e não faça mais nada se e somente se $f_u(n) = 0$. Este procedimento resultará numa variedade $\xi_u \not\subset \# \sum_{i \in \omega_0} T^2(i)$ que é obviamente genérica e não-compacta, porque ela não pode ser difeomorfa a uma variedade standard.

Com o exemplo 3 vimos que, dada uma variedade standard $\hat{M} \in \mathbf{M}[G]$, podemos ter subvariedades abertas genéricas $X \not\subset \hat{M}$, tal qual ξ_u.

Chapter 4

Conclusões

Utilizando as ferramentas dadas pela teoria axiomática dos conjuntos e pela teoria dos modelos, mostramos em que uma dada mudança semântica influi numa teoria axiomatizada em física matemática.

Após termos estudado alguns conceitos relacionados à teoria ergódica, demonstramos a existência de uma ligação entre a velocidade de crescimento da cardinalidade do conjunto de órbitas simbólicas de um dado sistema e sua entropia. Este resultado nos levou a uma versão diferente do teorema de Rohlin ([48]). Junto com este teorema, mostramos que a entropia não é um conceito absoluto do ponto de vista da teoria de modelos, no sentido que, se mudamos uma dada interpretação para os objetos de nossa teoria dos conjuntos, então podemos mudar a entropia de determinados processos.

Como sabemos, a entropia é uma medida da quantidade de informação de um dado sistema ([47]). Se um sistema se comporta de maneira aleatória, a quantidade de informação contida nesse sistema é maior, implicando ser a sua entropia positiva. Mas vimos que, se um dado sistema tem entropia positiva num dado modelo, ele pode ter entropia nula noutro. Resta-nos então a pergunta: este sistema é ou não determinístico ?

Todos estes resultados nos levam a pensar melhor sobre a caracterização, via entropia, de fenômenos caóticos ou aleatórios.

Na seção 3.3, obtivemos uma sentença formalmente indecidível no eletromagnetismo clássico. Esta sentença nos dizia que, numa dada extensão booleana, podiam existir campos eletromagnéticos que não seriam alcançáveis, via processos contrutíveis (no sentido de Gödel), de um conjunto denso de campos, que poderiam ser escolhidos (fisicamente e matematicamente) como sendo os campos "bem comportados". Tais processos construtivos quaisquer poderiam ser interpretados, por exemplo, como sendo uma aproximação (no sentido amplo da palavra), restando ainda muitas outras possibilidades.

Ainda dentro da idéia original, verificamos algumas consequências da teoria de modelos booleanos em espaços-tempo da Relatividade Geral ([16]). Mostramos que, se o espaço-tempo for cilíndrico, não teremos espaços-tempo genéricos; por outro lado, se o espaço-tempo não for compacto, teremos uma infinidade de espaços-tempo genéricos. Pela Proposição 3.4 e pelos exemplos na seção 3.4, vimos que, só podemos diferenciar variedades genéricas de variedades *standard* via propriedades globais, posto que abertos locais serão sempre difeomorfos entre si e, pelo princípio da relatividade, com isto, não existem experiências (locais) que diferenciem abertos genéricos de abertos *standard*. Uma pergunta, ainda não respondida, nos resta ([16]): Como podemos detectar se o nosso universo é ou não genérico ? Como vimos, somente experiências globais poderiam nos trazer uma resposta a esta pergunta.

Vimos, com todos estes exemplos, que uma dada teoria formalizada (no nosso caso, em ZF) apresenta uma multiplicidade de modelos que as satisfazem. Esta multiplicidade de modelos nos leva a diferentes resultados para dados objetos da teoria. O que temos aqui, como Cohen sugeriu ([11]), é algo parecido com a situação da divisão da geometria no século XIX, quando Gauss, Lobatchevskii, Bolyai e Riemann mostraram existir outras geometrias, além da euclidiana, onde o quinto postulado de Euclides não era mais válido.

B. W. Augerstein, *Hadron Physics and Transfinite Set Theory*, Inter. J. Theoretical Phys. **23**(1984) 1197.

Bibliography

[1] Roger Balian, *Du Microscopique au Macroscopique* - Tome 1, École Polytechnique 1982.

[2] J. L. Bell, *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory* - 2^{nd} edition, Clarendon Press 1985.

[3] P. Benioff, "Models of Zermelo Frankel Theory as a Carrier for the Mathematics of Physics. I", J. Math. Phys. **17**(1976), 618.

[4] P. Benioff, "Models of Zermelo Frankel Theory as a Carrier for the Mathematics of Physics. I", J. Math. Phys. **17**(1976), 629.

[5] Patrick Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons, Inc. 1965.

[6] G. D. Birkhoff, *Proof of the Ergodic Theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17**(1931) 656.

[7] Yu. Borisovich, N. Blizniakov, Ya. Izrailevich, T. Fomenko, *Introduction to Topology*, Mir Publishers 1985.

[8] G. J. Chaitin, "Goedel's Theorem and Information", Int. J. Theor. Phys. **21**(1982), 941.

[9] P. J. Cohen, *The Independence of the Continuum Hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **50**(1963), 1143 - 1148; *The Independence of the Continuum Hypothesis II*, Proc. Nat. Acad. Sci. **51**(1964) 1143.

[10] P. J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W. A. Benjamin Inc. 1966.

[11] P. J. Cohen e R. Hersh, *Non-Cantorian Set-Theory*, Sci. Amer., **217**(Dec. 1967) 104.

[12] N. C. Ada Costa e R. Chuaqui, *On Suppes Set Theoretical Predicates*, Erkenntnis, **29**(1988) 95.

[13] N. C. A. da Costa e F. A. Doria, *Structures, Suppes Predicates and Boolean-Valued Models in Physics*, preprint 1988.

[14] N. C. A. da Costa e F. A. Doria, *Mathematical Structures of First-Quantized Physics*, preprint 1989.

[15] N. C. A. da Costa, F. A. Doria e J. A. de Barros, *On a Formally Undecidable Statement in Classical Electromagnetic Theory*, in C. A. Bertulani e J. Lopes Neto, eds. Essays in Honor of Prof. C. M. do Amaral.

[16] N. C. A. da Costa, F. A. Doria e J. A. de Barros, *A Suppes Predicate for General Relativity and Set-theoretically Generic Space-times*, preprint 1989.

[17] F. A. Doria, J. A. de Barros e M. Ribeiro da Silva, *Non-Computable Functions, Generic Functions and Random Sequences*, Boletim da SPM **8**(2) (1987)197.

[18] F. A. Doria, *Boolean-Valued Models in Set Theory*, Notas de Curso, Forum de Ciência e Cultura/UFRJ, 1988.

[19] T. Eguchi, P. B. Gilkey e A. J. Hanson, *Gravitation, Gauge Theory and Differential Geometry*, Phys. Rep. **66**(6) (1980)213.

[20] G. G. Emch, *Mathematical and Conceptual Foundations of the* 20^{th} *Century Physics*, North Holland 1984.

[21] P. Fernandez, *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA 1976.

[22] H. Flanders, *Differential Forms*, Academic Press 1963.

[23] Nathaniel A. Friedman, *Introduction to Ergodic Theory*, Van Nostrand Reinhold Company 1970.

[24] Kurt Gödel, *Ueber Formal Unentscheidbare Saetz der Principia Matematica und Verwandter Systeme I*, Monastch. Math. Phys. **38**(1931) 173; Uma tradução ao português pode ser encontrada em: K. Gödel, *O Teorema de Goedel e a Hipótese de Contínuo*, Ed. Calouste Gulbenkian 1979.

[25] Kurt Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem ?*, The Amer. Math. Monthly **54**(1947) 515.

[26] Paul R. Halmos, *Naive Set Theory*, Van Nostrand 1960.

[27] Paul R. Halmos, *Lectures on Boolean Algebras*, Van Nostrand Reinhold 1963.

[28] Paul R. Halmos, *The Basic Concepts of Algebraic Logic*, Amer. Math. Monthly **63**(1956) 363.

[29] Paul R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company Inc. 1950.

[30] Thomas Jech, *Set Theory*, Academic Press 1978.

[31] Amnon Katz, *Principles of Statistical Mechanics*, W. H. Freeman and Company 1967.

[32] Czes Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press 1980.

[33] J. L. Krivine, *Théorie Axiomatique des Ensembles*, NRF 1969.

[34] Kenneth Kunen, *Set Theory*, North Holland 1983.

[35] Emmanuel Carneiro Leão, Marcio Tavares D'Amaral, Muniz Sodré e F. A. Doria, *A Máquina e seu Avesso*, Francisco Alves 1987.

[36] Seymour Lipschutz, *General Topology*, Schaum Publishing Company 1965.

[37] Ricardo Mañé, *Teoria Ergódica*, Projeto Euclides, IMPA 1983.

[38] Yuri Ivanovich Manin, *A Course in Mathematical Logic*, Springer Verlag 1977.

[39] G. W. Mackey, *Ergodic Theory and its Significance for Statistical Mechanics and Probability Theory*, Adv. in Math. **12**(1974) 178.

[40] Richard Mansfield e John Dawson, *Boolean-Valued Set Theory and Forcing*, Synthèse **33**(1976) 223.

[41] Edwin E. Moise, *Affine Structures in 3-Manifolds, V. The Triangulation theorem and Hauptvermutung*, Annals of Math. **56**(1952) 96.

[42] James R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1984.

[43] Ernest Nagel e James R. Newman, *Prova de Gödel*, Editora Perspectiva 1973.

[44] Karl Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge University Press 1983.

[45] Daniel J. Rudolph, *An Example of a Measure Preserving Map with Minimal Self-joining, and Applications*, Journal d'Analyse Math. **35**(1979) 97.

[46] Robert R. Stoll, *Set Theory and Logic*, Dover Pub. 1979.

[47] Claude Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Technical Journal **27**(1948) 379.

[48] Karl Sigmund, *On the prevalence of Zero Entropy*, Israel J. Math. **10**(1971) 281.

[49] N. Steenrod, *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton University Press 1951.

[50] P. Suppes, *Axiomatic Set Theory*, Van Nostrand 1960.

[51] Richard C. Tolman, *Principles of Statistical Mechanics*, Dover Pub. Inc. 1979.

[52] Francois Treves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press 1967.

[53] Constantino Tsallis, *Notas do Curso de Mecânica Estatística*, CBPF 1978.

[54] Y. Uspenski, *Gödel's Undecidability Theorem*, Mir Publishers 1987.